Arnold Kirsch

Zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen in der Unter- und Oberstufe[1]

Vorbemerkungen

Reale Wachstumsprozesse der verschiedensten Art werden zur Zeit in der Öffentlichkeit vielfältig diskutiert. In der Tat spielen Wachstumsprozesse - wie auch Zerfallsprozesse - in Natur- und Wirtschaftswissenschaften und allgemein für das Umweltverständnis eine wichtige Rolle, so daß die, solche Prozesse beschreibenden Exponentialfunktionen von großer Bedeutung sind. Für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht sind die Exponentialfunktionen zweifellos wichtiger als die Logarithmusfunktionen, insbesondere da deren Bedeutung als Rechenhilfe wegen des Vordringens der Taschenrechner praktisch weggefallen ist.

Bisher behandelt man im Unterricht (wohl nicht nur bei uns in der Bundesrepublik) Zinseszinsrechnung, geometrische Folgen und Exponentialfunktionen weitgehend isoliert voneinander und ohne ernsthafte Anwendungsbezüge. Demgegenüber plädiere ich für eine Behandlungsweise, die beziehungshaltig ist, im Sinne der Ausführungen von H. Freudenthal in seinem bekannten Buch, und die den Schüler zu einem verständigen Umgang mit Exponentialfunktionen in den verschiedensten Situationen befähigt.

Keinesfalls darf die Einführung der Exponentialfunktionen den obersten Klassen des Gymnasiums vorbehalten bleiben! Vielmehr sollen alle Schüler schon frühzeitig eine angemessene Vorsstellung von der Gesetzmäßigkeit des exponentiellen Wachstums erwerben.

[1] Vortrag am 29.9.1977 auf dem "Symposion für Schulmathematik" des IX. Österreichischen Mathematikerkongresses in Salzburg. - Der Vortrag stützt sich auf die Publikationen: A. Kirsch, Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht, DdM 4 (1976), Heft 2, S. 257-284; W. Blum und A. Kirsch, Elementare Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung, DdM 5 (1977), Heft 4. Dort sind auch weitere Literaturhinweise angegeben.

Diese Vorstellung soll Schritt für Schritt ausgebaut werden; sie soll den Schüler offen halten für abschließende begriffliche Präzisierungen, die naturgemäß erst in den beiden letzten Klassen des Gymnasiums gegeben werden können. Ein solches Vorgehen entspricht dem Spiralprinzip der Curriculumtheorie, wie es besonders von J.S. Bruner betont worden ist.

Wir Lehrer haben dabei die Aufgabe, den Zugang zu dem als schwierig geltenden Gegenstand so weit wie möglich zu vereinfachen - nicht nur im Hinblick auf die Schüler der Hauptschule, die ich durchaus mit im Sinn habe, sondern auch für die Gymnasiasten, von denen ja nur wenige Mathematiker werden wollen. Dabei müssen wir uns aber vor Verfälschung hüten, wie sie z.B. schon mit einer gedankenlosen Anwendung der einfachen Zinsrechnung zur Beschreibung von Kapitalvermehrungen gegeben ist.

Im folgenden mache ich eine Reihe von konkreten Vorschlägen, die legitime Vereinfachungen beinhalten, so: Aktivitäten mit dem Taschenrechner, Anlegen von Tabellen vor der Benutzung von Formeln, verbale statt formale Fassung der Funktionalgleichung, Ausgliederung von Existenznachweisen.

Bevor ich dies ausführe, möchte ich kurz einige fachdidaktische Gesichtspunkte explizieren, die bereits mit den einführenden Bemerkungen angesprochen wurden und uns im folgenden leiten werden:

- Anwendungsbezug , allgemeiner: Beziehungshaltigkeit (im Sinne von H. Freudenthal[1]): als eine Zielvorstellung und als einen Gesichtspunkt für die Rechtfertigung des Mathematikunterrichts;
- Spiralprinzip (betont von J.S. Bruner[2], und speziell für den Mathematikunterricht von E. Wittmann[3]: als ein Verfahren zur Konstruktion von Lehrgängen ("Curricula");
- Einsatz adäquater Darstellungsweisen ("Repräsentationsmodi" nach J.S. Bruner): als ein methodisches Hilfsmittel für das Zugänglichmachen mathematischer Gegenstände, insbesondere auf früher Stufe, im Sinne des Spiralprinzips.

So hoffe ich, daß dieser Vortrag nicht nur einige konkrete Anregungen für Ihren Unterricht gibt, sondern auch den Wert bewußter fachdidaktischer Überlegungen für den praktizierenden Lehrer deutlich macht.

---

1 H. Freudenthal, Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1, Klett, Stuttgart 1973.
2 J.S. Bruner, Der Prozeß der Erziehung. Schwann, Düsseldorf 1970.
3 E. Wittmann, Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig 1974.

Erste bis vierte Klasse (Unterstufe des allgemeinbildenden höheren Schulwesens in Österreich)

Im Sinne des Spiralprinzips beginne ich mit der ersten und zweiten Klasse (5. und 6. Schuljahr):

Die bekannte Aufgabe zum Wachstum einer Wasserrose - vielleicht zeitgemäßer formuliert für das Algenwachstum infolge übermäßiger Phosphatabfälle einer Fabrik - wird nicht wie bisher als isoliertes Kuriosum behandelt ("Scherzfrage": Nach wieviel Tagen ist die Hälfte des Sees bedeckt?). Vielmehr vermittelt sie ausbaufähige Vorerfahrungen.

Datum	Fläche
1.	1 dm^2
2.	2
3.	4
4.	8
5.	16
6.	32
7.	64
8.	128
9.	256
10.	512
11.	1024
12.	2048

3 Tage weiter

10 Tage weiter

$\boxed{\cdot 2}$ $\boxed{\cdot 8}$ $\boxed{\cdot 1024}$

Fig. 1

Die Schüler prägen sich die Zweierpotenzen bis $2^{10} = 1024$ ein. Sie legen eine Wertetafel an. Dabei begegnet ihnen zum ersten Mal die Grundregel oder Grundeigenschaft des exponentiellen Wachstums:

(I) Zu gleichlangen Zeiten gehört immer der gleiche Wachstumsfaktor.

So gehört zu einer Zeitspanne von 3 Tagen immer der Faktor 8, zu 10 Tagen immer der Faktor 1024 ($\approx$ 1000). Damit läßt sich die Tabelle leicht auch weiter fortsetzen.

Das Beispiel zeigt zugleich, daß sich schon auf dieser Stufe stetige, also nicht sprunghaft verlaufende Wachstumsprozesse behandeln lassen. "Sprunghaft" ist hier nur die Beschreibung, nicht das Wachstum selbst! Ebenso wie die sprunghafte Beschreibung bedeutet übrigens die Beschränkung auf Zweierpotenzen keine Verfälschung; man kann ja auch bei beliebigen stetigen exponentiellen Wachstumsprozessen durch die Einführung von Verdoppelungszeiten zu Zweierpotenzen als Wachstumsfaktoren übergehen. Hier wird also für später nichts "verbaut".

Weiter erinnere ich an die berühmte Schachbrettaufgabe. Zu ihrer überschlagsmäßigen Lösung brauchen die Schüler nur eine Tabelle anzulegen und die Grundregel (I) anzuwenden, wobei sie noch 1024 durch 1000 ersetzen. Das Weitergehen um 10 Felder bewirkt dann immer ein Anhängen von drei Nullen an die Körnerzahl.

	Feld Nr.	Ungefähre Anzahl der Körner	
10 Felder weiter	1	1	·1000
	11	1 000	
	21	1 000 000	
	31	1 000 000 000	
	41	1 000 000 000 000	
	51	1 000 000 000 000 000	
	61	1 000 000 000 000 000 000	·8
3 Felder weiter	64	8 000 000 000 000 000 000	

Fig. 2

An weitere, zur Behandlung in der 1. oder 2. Klasse geeignete Wachstumsprozesse erinnere ich nur durch Stichworte: Anzahl von Einzellern bei sukzessiver Teilung; Anzahl der Vorfahren; Weitererzählen eines Gerüchts. Auch hierbei können sehr große Zahlen auftreten, die aber von den kleinen Schülern wie in den beschriebenen Beispielen bewältigt werden, mittels der Faustregel "Zehnmal hintereinander verdoppeln bedeutet vertausendfachen".

In der dritten und vierten Klasse (7. und 8. Schuljahr) werden die Schüler heutzutage mit der Verkettung von Bruchoperatoren und mit der Prozentrechnung als Teil der Bruchrechnung vertraut gemacht. Dies ermöglicht schon hier eine adäquate Beschreibung von exponentiellen Wachstumsprozessen mittels prozentualer Wachstumsraten.

Entscheidend dafür ist die Einsicht, daß Prozentangaben multiplikativen Charakter haben. Das "Wachsen um p %" bedeutet nur scheinbar eine additive Operation, wie es die Schreib- bzw. Sprechweisen "p % dazu" oder "plus p%" suggerieren. In Wirklichkeit wird hierbei auf die Ausgangsgröße der multiplikative Operator $\cdot\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ angewandt. Die richtige Interpretation von Prozentangaben erfordert also vom Schüler die Fähigkeit des Übersetzens, gemäß der Übersetzungsregel:

"wächst um p %" bedeutet "multipliziert sich mit dem Faktor $1 + \frac{p}{100}$". (Dieser Faktor ist auch bei Zerfallsprozessen, also negativem p, eine positive Zahl, aber kleiner als 1.)

Hiermit ist ein Lernziel von zentraler Bedeutung angesprochen, das gegenwärtig weder genügend betont noch gar durchgängig erreicht wird (auch nicht im Gymnasium), und das womöglich durch die Verbreitung von Taschenrechnern mit Prozent-Taste erst recht gefährdet ist.

Für das Umgehen mit Wachstumsfaktoren ist weiter die Einsicht wichtig:

"wächst um p%, dann um q%" bedeutet nicht "wächst um (p+q)%".

Vielmehr erhält man den richtigen Prozentsatz mittels Verketten der betreffenden Operatoren. Diese Einsicht braucht man den Schülern der 3. Klasse heute (dank der Operatormethode in der Bruchrechnung) nicht mehr vorzuenthalten. Aus ihr folgt für Wachstumsprozesse, die der Grundregel genügen: zur n-fachen Zeit gehört nicht n-faches (prozentuales) Wachstum. In diesem Sinne bilden also die Wachstumsprozesse ein Gegenbeispiel zum Begriff der Proportionalität. Dies beizeiten im Unterricht klarzustellen, entspricht auch dem allgemeineren Ziel, das Urteilsvermögen hinsichtlich des Vorliegens bzw. Nicht-Vorliegens von Proportionalitäten zu schärfen und einem verbreiteten Proportionalitäts-Irrglauben entgegenzuwirken.

Demgemäß sollte man die bekannte Regel der einfachen Zinsrechnung deutlich als Sparkassen-Konvention oder als Regel für Überschlagsrechnungen bei kleinen Prozentsätzen und Zeitspannen kennzeichnen. Proportionalität zwischen Zeitspannen und Wachstum ist nicht das "Elementare", das an den Anfang gehört. Vielmehr ist dieser rechnerische Ansatz erst dann gerechtfertigt, wenn man den Sachverhalt anhand von großen Prozentsätzen und Zeitspannen geklärt hat.

Statt einem Wachstumsprozess (mit konstanter Wachstumsrate) in unzulänglicher Weise mittels Zinsrechnung zu beschreiben, können

Schüler ihn ganz leicht adäquat simulieren, wenn sie über einen Taschenrechner der einfachsten Art verfügen. Zweckmäßig wird wieder eine Tabelle angelegt. Im folgenden Beispiel ist ein Zerfallsprozess mit einer stündlichen Zerfallsrate von 3% dargestellt. Man denke etwa an das aktuelle Problem des Abbaus von Giftstoffen. In diesem Falle gibt man in den Rechner den konstanten Faktor 0,97 ein und multipliziert damit den Anfangswert, dann das Ergebnis, dann das neue Ergebnis, und so fort. Ein einziger Knopfdruck liefert jeweils den Wert der Substanzmenge nach einer weiteren Stunde.

Zeitpunkt	Substanzmenge
Mo 10 Uhr	200 mg
11	194,0
12	188,2
13	182,5
14	177,1
15	171,7
16	166,6

$\cdot\, 0{,}97$

$\cdot\, (0{,}97)^6$

Fig. 3

Man erkennt als Folgerung aus (I):

(IIa) Zur n-fachen Zeitspanne gehört immer die n-te Potenz des Wachstumsfaktors.

Substantiell hat man hiermit schon die geometrischen Folgen behandelt, aber in einer stark handlungsbezogenen statt formalen Weise.

Auch die sich aufdrängende Frage "Nach wieviel Schritten erfolgt Halbierung?" läßt sich mit dem Taschenrechner sofort beantworten, durch Zählen der erforderlichen Schritte. Im vorliegenden Beispiel hat sich nach 23 Stunden die Substanzmenge ungefähr halbiert; folglich halbiert sie sich (Grundregel) immer nach 23 Stunden. Wir können nun die Tabelle wie angegeben fortsetzen und aus ihr z.B. ablesen, nach welcher Zeit nur noch weniger als 1 g der Substanz vorhanden ist. Keinesfalls ist also (bei einer stündlichen Zerfallsrate von 3%) die Substanz nach 33 Stunden im wesentlichen abgebaut!

Zeitpunkt	Ungefähre Substanzmenge	
Mo 10 Uhr	200 mg	$\cdot\frac{1}{2}$
Di 9	100	
Mi 8	50	
Do 7	25	
Fr 6	12,5	$\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8$
Sa 5	6,3	
So 4	3,1	
Mo 3	1,6	
Di 2	0,8	

Fig. 4

Wichtig ist, daß die Schüler instandgesetzt werden, Probleme dieser Art selbständig zu bewältigen, ohne höhere Hilfsmittel, ohne Bemühung von Fachleuten. Ich sehe darin einen Beitrag zur Erreichung allgemeiner Lernziele wie "Urteilsvermögen hinsichtlich des dem eigenen Verstand Zugänglichen"; "Befreiung von Wissenschaftsgläubigkeit".

An dieser Stelle, ehe ich zum Oberstufenunterricht übergehe, möchte ich einige weitere allgemein-didaktische Bemerkungen einflechten, und zwar zum Thema Repräsentationsmodi (Darstellungsweisen): Seit jeher versucht man, mathematische Gegenstände durch "Veranschaulichen", allgemeiner durch Wechseln des Darstellungsmediums zugänglicher zu machen. Heute unterscheidet man bekanntlich mit J.S. Bruner die Darstellung durch Handlungen (enaktive Repräsentation), die Darstellung durch Bilder (ikonische Repräsentation) und schließlich die Darstellung durch symbolische Mittel, wobei wir in der Mathematik, schärfer als bei Bruner, noch zwischen sprachlicher und formaler Repräsentation zu unterscheiden haben. In didaktischen Prinzipien wie dem "Präfigurationsprinzip" fordert man die Verwendung gerade der präsymbolischen Darstellungsweisen. Diese ist besonders wichtig im Elementarunterricht; aber auch im Gymnasium sind derartige methodische Bemühungen keineswegs überflüssig.

So arbeiten wir auf enaktivem Niveau, wenn wir bei der Schachbrettaufgabe reale Getreidekörner zählen und wägen, oder wenn wir mit dem Taschenrechner einen Wachstumsprozess "nachspielen" (simulieren). Die verwendeten Tabellen mit Operatorpfeilen bilden ein Beispiel für ikonische Begriffsrepräsentation. Erst recht gilt dies für den Umgang mit Funktionsgraphen, den wir sehr ausgiebig praktizieren wollen. Auf dem symbolischen Niveau hat man sprachliche und formale Repräsentation zu unterscheiden. Unsere Grundregel (I) ist die sprachliche Fassung einer Funktionalgleichung. Die Regel (IIa) repräsentiert sprachlich den Begriff der geometrischen Folge. Geeignete sprachliche Fassungen können den Zugang durchaus erleichtern; zumindest können verfrühte Formalisierungen ihn erschweren.[1] Im folgenden werden wir auch den Übergang zum formalen Niveau erörtern.

Fünfte und sechste Klasse (erste beide Jahre der Oberstufe)

In der fünften Klasse (9. Schuljahr) liefert die Frage nach dem Wachstumsfaktor, der zur halbierten Zeitspanne gehört, eine neue Motivation für den Begriff der Quadratwurzel. Im Unterricht hat sich das folgende Beispiel bewährt: "Die Bevölkerungszahl der Erde verdoppelt sich jeweils nach 32 Jahren. Im Jahre 1972 betrug sie 3,8 Millarden. Wie groß wird sie (wenn das so weitergeht) 16 Jahre später, d.h. im Jahre 1988 sein?" Die Schüler sollten nun nicht in gedankenlosem Proportionalitätsdenken mit 1,5 multiplizieren. Vielmehr erkennen sie mit Hilfe einer Tabelle, daß der gesuchte Faktor x die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllen muß. Die Quadratwurzel wird dann wie üblich (ohne Bezugnahme auf das Bevölkerungsbeispiel) eingeführt. – Die Interpolation geometrischer Folgen wurde übrigens auch im traditionellen Unterricht behandelt, aber weitgehend beziehungslos. Schon aus Gründen der zeitlichen Anordnung des Lehrstoffs konnte sie nicht zur Motivation des Wurzelbegriffs fruchtbar gemacht werden.

		Jahr	Bevölkerungszahl		
		1972	3,8 Mrd		
	16			$\cdot x$	
32 Jahre weiter		1988	$\boxed{}$		$\cdot 2$
	16			$\cdot x$	
		2004	7,6 Mrd		

Fig. 5

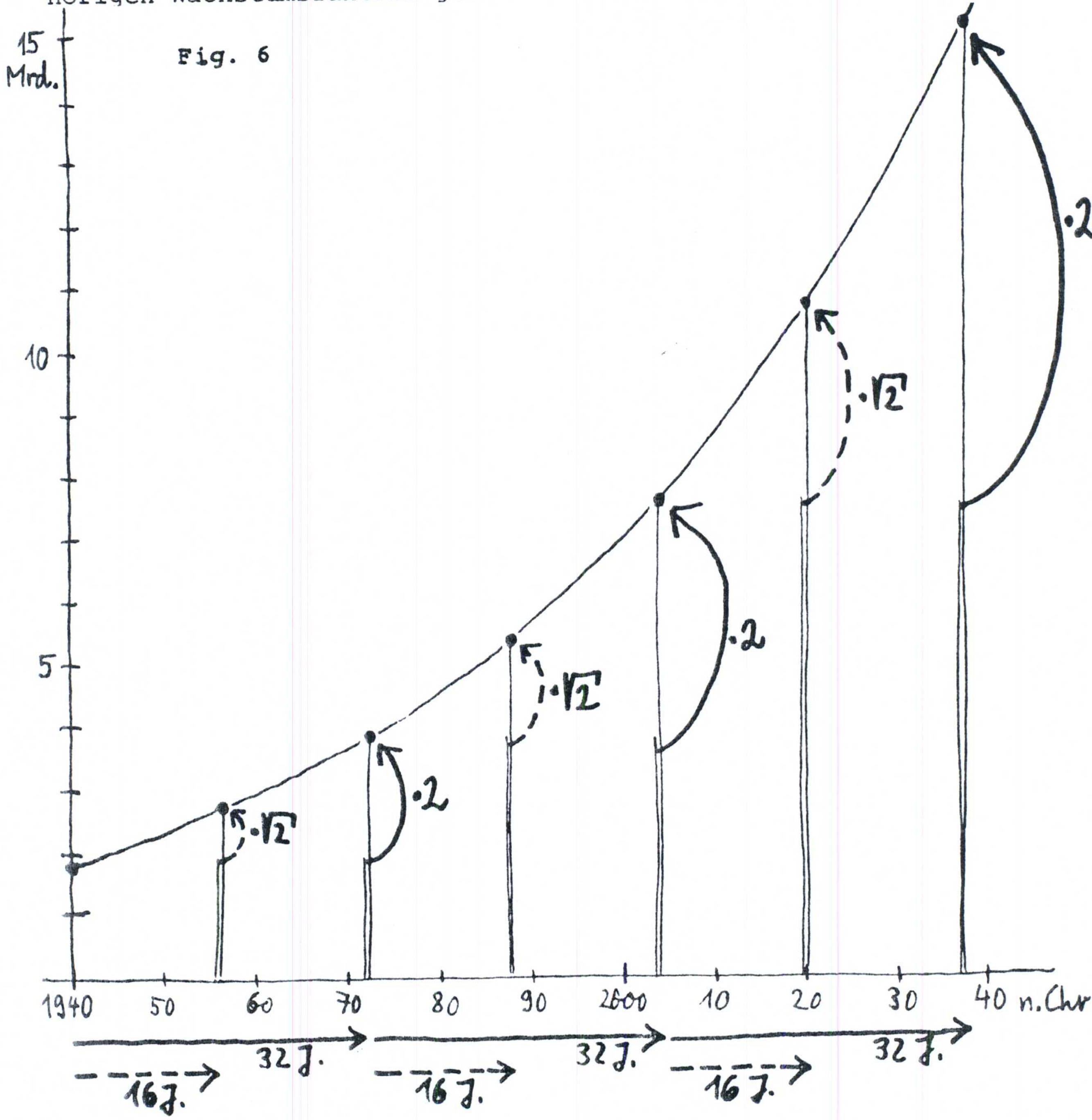
[1] Damit soll nicht bestritten werden, daß geeignete Formalisierungen ein wesentliches Element der Mathematik bilden, und daß der Umgang mit ihnen durchaus ein Ziel des Mathematikunterrichts ist. Siehe hierzu auch H.-J. Vollrath, Formeln und Berufsorientierung im Mathematikunterricht, WPB 27(1975), Heft 9, S. 489-496.

Allgemein erkennt man nun die Regel

(IIb) Zur halben Zeit gehört immer die Quadratwurzel des Wachstumsfaktors.

Spätestens an dieser Stelle gehen wir zur graphischen Darstellung (im kartesischen Achsenkreuz) von Wachstumsprozessen über. Ein Taschenrechner mit Quadratwurzeltaste liefert sofort die eingetragenen Zwischenpunkte - und auf Wunsch beliebig viele weitere Zwischenpunkte. Man sieht, wie sich in dieser Weise jeder Wachstumsprozess, von dem zwei Punkte gegeben sind, ohne Verwendung von Formeln praktisch beliebig genau darstellen läßt. (Sukzessives Halbieren der Zeitintervalle; Berechnen des zugehörigen Wachstumsfaktors jeweils durch Wurzelziehen.)

Fig. 6



Wir nennen nun jede monotone Funktion, die die Grundeigenschaft (I) hat, eine (exponentielle) Wachstumsfunktion. Dann vermitteln die beschriebenen Interpolations-Aktivitäten wie auch die Existenz realer Wachstumsprozesse die grundlegende Überzeugung (hier in der Ausdrucksweise der Koordinatenebene formuliert):

Durch je zwei Punkte der oberen Halbebene, die auf keiner Parallelen zu einer der Achsen liegen, geht genau eine (exponentielle) Wachstumsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, und diese ist bijektiv.

Bei dieser Formulierung werden Stellen und Werte einer Wachstumsfunktion als reelle Zahlen aufgefaßt. Nichtsdestoweniger spreche ich nach wie vor auch von Zeitpunkten.

Dieser Sachverhalt ist durch das Vorstehende weitgehend begründet, aber noch nicht vollständig bewiesen. Trotzdem benutzen wir ihn bewußt als Grundlage für das Folgende. Der Mathematiker bezeichnet ein solches Vorgehen als "axiomatische Einführung". Ich würde lieber sagen, daß hier ein Existenz- und Eindeutigkeitsnachweis, für den im Augenblick kein Bedürfnis besteht, bewußt ausgegliedert wird, und sehe darin eine legitime Anwendung des schon genannten Spiralprinzips.

Jetzt, in der sechsten Klasse (10. Schuljahr), wird eine Erweiterung des Potenzbegriffs erforderlich: Entweder man definiert wie üblich Potenzen mit rationalen Exponenten und (andeutungsweise ausgeführt) mit reellen Exponenten; dann kann man als Satz beweisen:

Die Wachstumsfunktion durch (0;1) und (1;b) hat an der Stelle $r \in \mathbb{R}$ den Wert b^r.

Oder man benutzt diesen Sachverhalt (Fig. 7) zur Definition von b^r für $r \in \mathbb{R}$.

Dann erscheint die übliche Definition als Satz. Auch bei dem neuen Vorgehen erhält man leicht die grundlegenden Potenzregeln $b^{r+s} = b^r \cdot b^s$ und $b^{t \cdot r} = (b^t)^r$. Das ist für die erste dieser Regeln in Fig. 8 angedeutet.

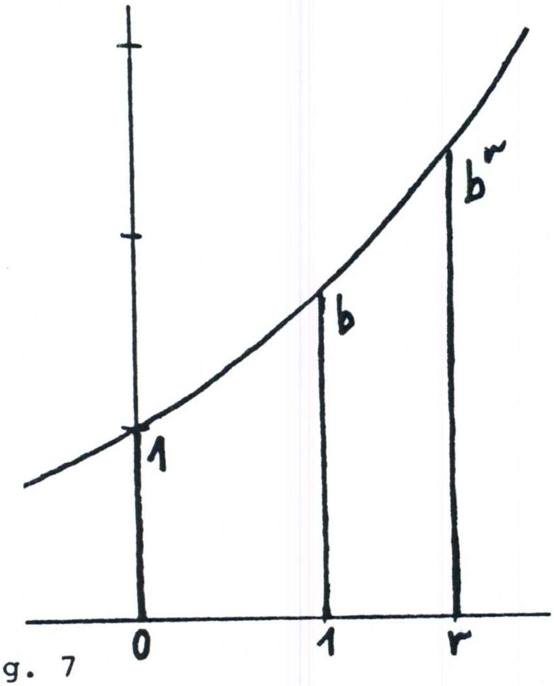


Fig. 7

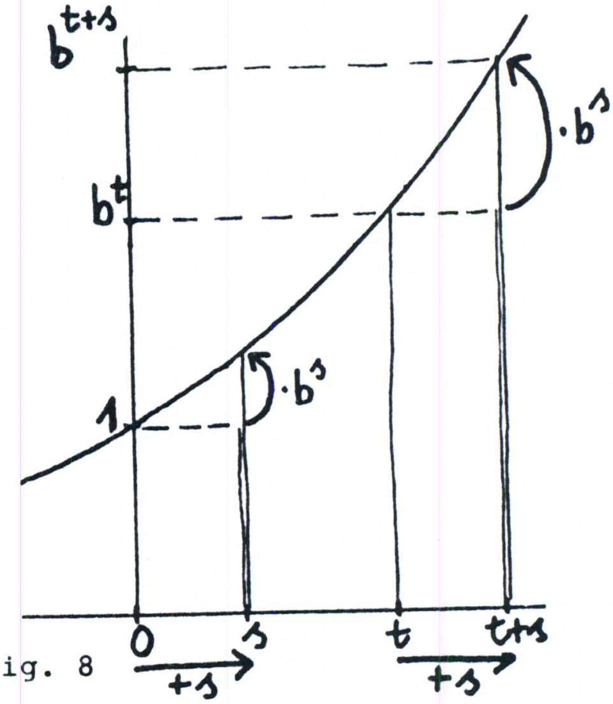


Fig. 8

Nun lassen sich (IIa) und (IIb) verallgemeinern zu der Regel

(II) Zur r-fachen Zeit gehört immer die r-te Potenz des Wachstumsfaktors.

Sie bildet die Grundlage für den <u>rechnerischen Umgang</u> mit Wachstumsfaktoren, wenn ein <u>Taschenrechner mit x^y-Taste</u> zur Verfügung steht, und zwar in weitgehender Analogie zur sogenannten Schlußrechnung (Dreisatzrechnung). Formeln werden hierbei noch nicht benutzt.

Erst danach stellen wir die <u>Funktionsgleichung einer (exponentiellen) Wachstumsfunktion</u> f auf: Wir setzen $f(0) = a$ und bezeichnen den zur Zeitspanne 1 gehörigen Wachstumsfaktor mit b. Dann ist $\frac{1}{a}\cdot f$ ebenfalls eine Wachstumsfunktion, die nun durch (0;1) und (1;b) geht. Nach der Einführung von b^r folgt $\frac{1}{a}\, f(r) = b^r$. Jede (exponentielle) Wachstumsfunktion ist also von der Form

$$f(t) = a\cdot b^t, \text{ wobei } a,b \in \mathbb{R}^+ .$$

Umgekehrt ist jede solche Funktion (von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$) wegen der ersten Potenzregel natürlich eine Wachstumsfunktion. Im Fall $a = 1$ sprechen wir von einer <u>Exponentialfunktion</u> (im engeren Sinne). Im folgenden sei <u>stets</u> $b \neq 1$ <u>vorausgesetzt</u>.

An dieser Stelle - spätestens aber in einem Analysis-Vorkurs in der siebenten Klasse - sollten die Schüler sich ein wenig im

Umgang mit Funktionsgraphen üben: Welche geometrische Bedeutung hat der Koeffezient a in der Funktionsgleichung? Es ist wohl bekannt: Der Graph der Exponentialfunktion $t \mapsto b^t$ geht durch "vertikale Streckung" (Streckung senkrecht zur ersten Achse) mit dem Faktor a in den Graphen von $t \mapsto a \cdot b^t$ über. Wie wirkt sich nun aber eine horizontale Streckung (Streckung senkrecht zur zweiten Achse) mit dem Faktor k aus? Sie überführt $t \mapsto b^t$ in die Funktion $t \mapsto b^{\frac{t}{k}}$, d.h. nach der zweiten Potenzregel: in die Exponentialfunktion $t \mapsto c^t$ mit der neuen Basis $c = b^{\frac{1}{k}}$. Und offensichtlich erhält man, wegen der Bijektivität der Exponentialfunktionen, jede Basis $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ durch eine und nur eine passende Streckung mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also: Horizontale Streckung bedeutet Basisänderung, und umgekehrt.

Dieser Sachverhalt ermöglicht eine normierte Schreibung aller Wachstumsfunktionen mit einer festen Basis, etwa 2. Die Funktion $t \mapsto a \cdot b^t$ entsteht aus $t \mapsto a \cdot 2^t$ durch horizontale Streckung mit dem Faktor d, der jetzt gerade die Verdoppelungszeit (bzw. Halbierungszeit) bedeutet, die ja zur Beurteilung und überschlagsmäßigen Behandlung konkreter Wachstumsprozesse so wichtig ist.

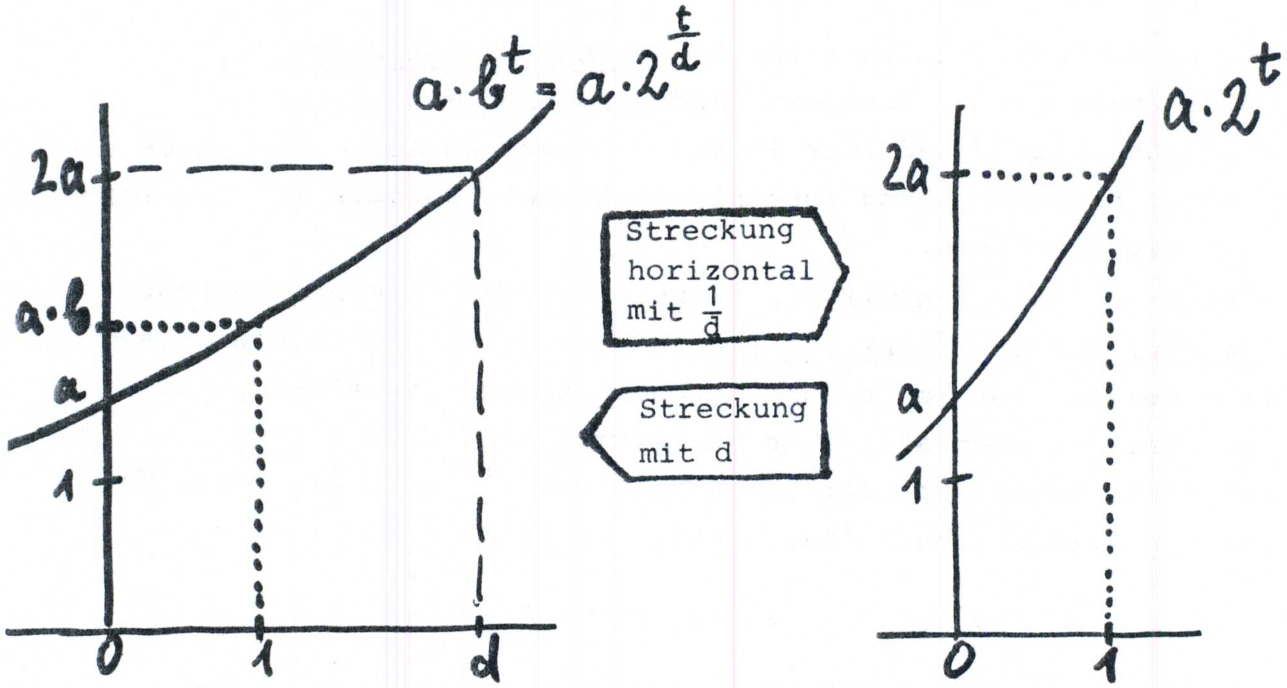


Fig. 9

Will man d zu gegebener Basis b rechnerisch (statt zeichnerisch am Graphen) bestimmen, so muß man die Gleichung $b^d = 2$ oder $2^{\frac{1}{d}} = b$ nach d auflösen. Dies motiviert in sehr natürlicher Weise die Einführung des (Zweier-) Logarithmus. An dieser Stelle genügt aber auch eine Tafel der Funktion $x \mapsto 2^x$.

In weiterführenden wissenschaftlichen Darstellungen verwendet man bekanntlich statt der Basis 2 die Basis e. Ihre Einführung sollte dem Analysisunterricht vorbehalten bleiben. Erst dort ist eine natürliche Begründung möglich, auf die wir sogleich zu sprechen kommen.

Zuvor möchte ich einige allgemeine Bemerkungen über das Spiralprinzip, das in der Substanz natürlich nicht neu ist, einschieben. "Spirale" ist hier im Sinn von "Schraubenfeder" zu verstehen. Das Prinzip besagt, daß man die Behandlung eines Gegenstandes schon auf sehr tiefem Niveau beginnt (ja "vorwegnimmt") und dann immer wieder, jeweils auf höherem Niveau, aufgreift. Dabei ist es von Anfang an wichtig, nichts zu verfälschen, nichts zu verbauen und den Schüler offen zu halten für die spätere Wiederaufnahme des Themas. Dies dürfte bei der hier vorgeschlagenen Behandlung von Wachstumsprozessen gewährleistet sein. Dieses konkrete Beispiel liefert zugleich eine mögliche Begründung des Spiralprinzips: Schüler sollen wichtige Gegenstände möglichst früh kennenlernen, wofür außer inhaltlichen auch lerntheoretische Gesichtspunkte sprechen.

Ein Beispiel für die Beachtung des Spiralprinzips ist auch die vorgeschlagene Ausgliederung einer abschließenden Definition bzw. eines Existenznachweises für den Begriff "Exponentialfunktion".[1] Wenn hiernach möglicherweise nicht jeder Schüler offen bleibt für eine spätere Wiederaufnahme des Themas auf höherem Strengeniveau, so halte ich dies angesichts der inhaltlichen Bedeutsamkeit des Gegenstandes für verantwortbar. - Ein "Gegenbeispiel" scheint mir die heute übliche Behandlung des Eulerschen Polyedersatzes schon in der Grundschule (Volksschule) zu sein: Hier würde ich die Gefahr, daß die Schüler für eine spätere, adäquate Behandlung des Gegenstandes "verdorben" werden, nicht in Kauf nehmen.

---

[1] In diesem Sinne habe ich ein eigenes Prinzip für die Konstruktion mathematischer Lehrgänge etwa wie folgt formuliert: Man bevorzuge solche Wege, die ein stellenweises Ausgliedern von Beweisen ermöglichen, ohne daß der ganze Aufbau zusammenbricht. Hierzu und für weitere Beispiele siehe A. Kirsch, Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht, DdM 5 (1977), Heft 2, S. 87-101.

Übrigens sollte die später erforderliche Revision bei der Wahl einer ausgezeichneten Basis der Exponentialfunktionen nicht als Mangel unseres Vorgehens gesehen werden und bedeutet keinen Verstoß gegen das Spiralprinzip. Wollte man bestrebt sein, jeden Begriff gleich so einzuführen, daß er nie mehr revidiert werden muß, so widerspräche dies auch dem Vorgehen in der wissenschaftlichen Forschung; darauf hat kürzlich R. Fischer ausdrücklich hingewiesen. Mit anderen Worten: Die Beachtung des Spiralprinzips beim Lernen von Mathematik entspricht zugleich einem Wesenszug der Mathematik selbst.

Siebente und achte Klasse (letzte beide Jahre der Oberstufe)

Jetzt wäre der Zeitpunkt für eine formale Fassung der (bisher nur verbal benutzten) Funktionalgleichung gekommen. Ich gebe eine solche Fassung kurz an und weise hin auf den kleinen Unterschied zwischen dieser Funktionalgleichung (links), welche die exponentiellen Wachstumsfunktionen kennzeichnet (unter allen monotonen Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$), und der bekannten Funktionalgleichung für die Exponentialfunktionen im engeren Sinne, als Isomorphismen von $(\mathbb{R},+)$ auf $(\mathbb{R}^+,\cdot)$:

(exponentielle) Wachstumsfunktionen:	Exponentialfunktionen (im engeren Sinne):
$f(t+s) = f(t)\cdot\frac{f(s)}{f(0)}$	$f(t+s) = f(t)\cdot f(s)$

A. Engel hat bekanntlich zahlreiche interessante Anwendungen der Funktionalgleichung für den Unterricht vorgeschlagen.

Wichtiger als dieser zweifellos bedeutsame Gegenstand ist aber, daß die Schüler in der Differentialrechnung die Ableitung der Exponentialfunktionen und sogar die Differentialgleichung kennenlernen - auch in mathematischen Minimalkursen. Eine Beschränkung der Differentialrechnung etwa nur auf rationale oder Wurzelfunktionen erscheint mir nicht verantwortbar. Selbst bei extremem Zeitmangel kann man, wie ich nun mit W. Blum zeigen möchte, durch bewußtes Ausgliedern eines genau lokalisierten Existenznachweises ganz rasch zum Kern der Sache vorstoßen und damit auch wichtige neue Anwendungen erschließen.

Als Voraussetzung genügt, daß die Schüler die Exponentialfunktionen in der beschriebenen Weise kennengelernt haben:

(1) Für $b \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ ist $b^x \in \mathbb{R}^+$ wohldefiniert;

(2) es gilt $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$ und $b^{xy} = (b^x)^y$;

(3) für $b \neq 1$ ist $x \mapsto b^x$ eine streng monotone Funktion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$.

Ferner: horizontale Streckung des Graphen entspricht Basiswechsel; die Umkehrung von $x \mapsto b^x$ heißt ${}_b\log$.

Nun zur Ableitung der Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$: Die Sekantensteigung zu x und $x + h$ ist $\frac{b^{x+h}-b^x}{h} = b^x \cdot \frac{b^h-1}{h}$,

also bei festem h proportional zum Funktionswert. Hier zeichnet sich das wesentliche Ergebnis schon ab. Nun stellt sich die Frage:

Existiert $\lim \frac{b^h-1}{h}$? D.h. hat die Funktion an der Stelle 0 eine Tangente?

Wir nehmen hierzu ohne Beweise als einleuchtend an:

Die Funktion $x \mapsto b^x$ $(b \neq 1)$

besitzt bei 0 eine Tangente: $\lim \frac{b^h-1}{h} = m\ (\neq 0)$,

und sie

verläuft oberhalb von dieser: $b^x > 1+mx$ für alle $x \neq 0$.

(Folglich verläuft die Tangente oberhalb von keiner anderen Geraden durch (0; 1)).

Auch die DMV in ihrer Denkschrift zum Mathematikunterricht fordert "nicht Beweise aller dieser Tatsachen"; sie spricht übrigens sofort von "der" Tangentensteigung, ohne die Existenz zu problematisieren. – Der Mathematiker fühlt sich natürlich herausgefordert, diese unbewiesenen Annahmen zu reduzieren. In der Tat folgt mit etwas Vorkenntnissen (oder Mühe) z.B. aus der ersten Teilannahme die zweite und aus der zweiten die erste[1].

[1] Die zweite (und damit die erste) Teilannahme läßt sich auch direkt aus unseren Voraussetzungen (1) bis (3) folgern. Hierzu: G. Pickert, Analysis in der Kollegstufe, MU 22(1976), Heft 5, S. 64-81; ferner W. Blum und A Kirsch, loc.cit.

Ich betone aber mit W. Blum: Das wesentliche Problem (für den Schüler, für jeden Anwender) ist nicht die hier ausgegliederte Existenz, sondern die Frage nach dem zahlenmäßigen Wert der Steigung m, d.h. nach der Berechnung dieser Zahl.

Dieser Frage wenden wir uns jetzt zu. Erste, zeichnerische Bestimmungsversuche liefert die nebenstehende Tabelle und damit die Überzeugung: Es muß eine ganz bestimmte Basis geben, und zwar in der Nähe von 2,7, für welche die Tangente bei 0 genau die Steigung 1 hat.

b	m
2	≈0,7
3	≈1,1
?	1
≈2,7	

Wir definieren nun e als diejenige Zahl, für welche (als Basis genommen) die Tangentensteigung bei 0 genau 1 ist, d.h. für welche gilt:

$$e^x > 1+x \quad \text{für alle} \quad x \neq 0.$$

Dies rechtfertigen wir durch die folgende Überlegung:
Hat $x \mapsto b^x$ an der Stelle 0 die Tangente $x \mapsto 1+mx$, so liefert die horizontale Streckung mit dem wohlbestimmten Faktor m eine, und offenbar die einzige Exponentialfunktion, eben $x \mapsto e^x$ (mit $e = b^{\frac{1}{m}}$, welche die Tangente $x \mapsto 1+x$ (an der Stelle 0) hat.

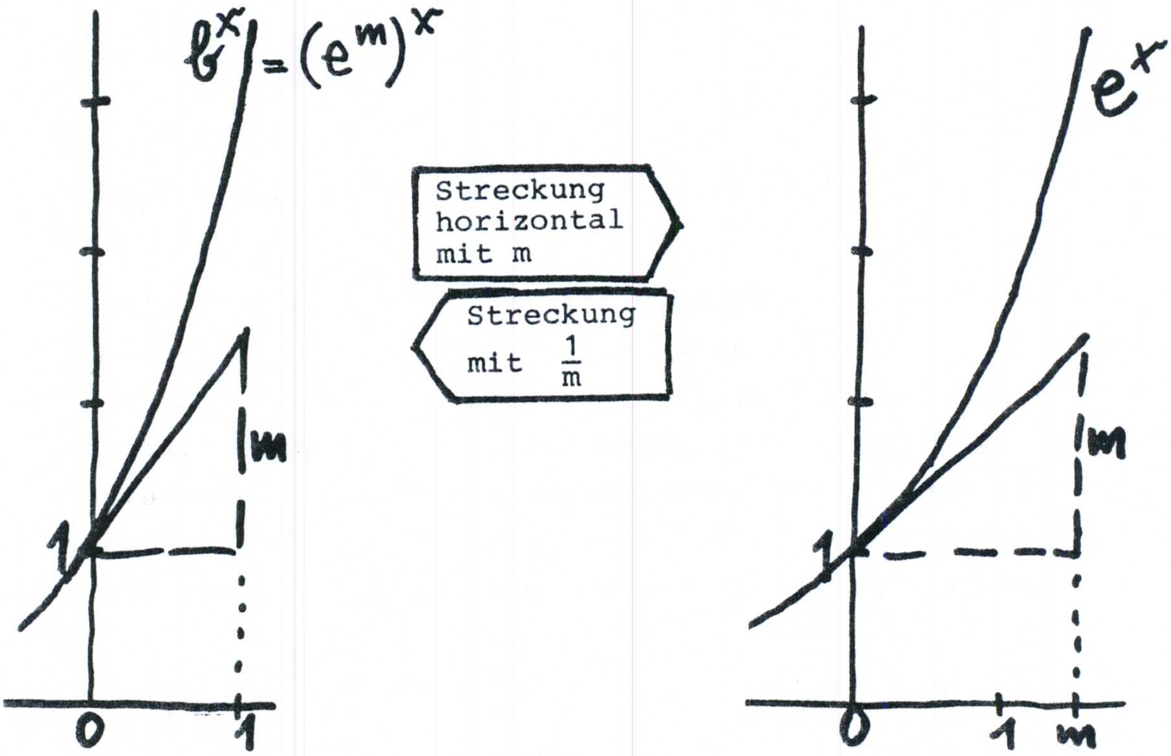


Fig. 10

Nach dem Vorangehenden erkennen wir übrigens sofort:

$$x \mapsto e^{mx} \text{ hat die Ableitung } x \mapsto m\cdot e^{mx}\ .$$

Um den zu vorgegebenem b gehörigen Wert m zu berechnen, setzen wir voraus, e sei schon bekannt und erhalten aus $e^m = b$, sofort $m = \frac{\log b}{\log e}$ $(= \ln b)$.[2] Damit erhalten wir das <u>Ergebnis:</u>

$$x \mapsto b^x \text{ hat die Ableitung } x \mapsto \frac{\log b}{\log e}\cdot b^x\ .$$

Offenbar ist es zweckmäßig, b^x jetzt in neuer <u>Normalform:</u> e^{mx}, mit Basis e , zu schreiben.

Die bisher zurückgestellte <u>numerische Bestimmung von</u> e schließlich wird deshalb besonders einfach, weil wir e <u>nicht mehr definieren</u>, sondern nur noch berechnen müssen:

<u>Grundidee:</u>

Für große n ist $e^{\frac{1}{n}} \approx 1+\frac{1}{n}$ (lineare Approximation!),

"also" $e \approx (1+\frac{1}{n})^n \approx 2{,}72$.

<u>Korrekte Ausführung:</u>

Für $n,m \in \mathbb{N}$ gilt $e^{\frac{1}{n}} > 1+\frac{1}{n}$, also $\qquad e > (1+\frac{1}{n})^n$,

sowie $\quad e^{-\frac{1}{m}} > 1-\frac{1}{m}$, also $\quad e^{\frac{1}{m}} < \dfrac{1}{1-\frac{1}{m}} = \dfrac{m}{m-1}$, $e < (\frac{m}{m-1})^m$,

also mit $m = n+1$: $\quad e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $\qquad$ (also insbesondere $e < 1{,}2^6 < 3$).

Es folgt $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n})$

$$e < (1+\tfrac{1}{n})^n + \frac{e}{n}$$

$$e < (1+\tfrac{1}{n})^n + \frac{3}{n} \qquad (\text{für } n \geq 5),$$

also $\qquad e = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$.

---

[2]Die Steigung m zur Basis 2 läßt sich schon mit Hilfe der Tafel der Zweierpotenzen bestimmen, aus $e^m = 2$, d.h. $2^{\frac{1}{m}} = e$.

Mit einem 8-stelligen Taschenrechner, der "hinten abschneidet", erhält man so bei einigem Geschick (mit $n = 1024$):

$$2{,}716 < e < 2{,}721.$$

Nun zur Differentialgleichung $f' = kf$, d.h. $f' - kf = 0$ (mit $D_f = \mathbb{R}$): Nach dem Vorangehenden finden wir die Lösung $f(x) = e^{kx}$, auch $a \cdot e^{kx}$, sofort durch Erinnern an die merkwürdige Ableitung der Exponentialfunktionen, nicht etwa in zeitlich aufwendigem "genetischen Vorgehen" durch Konstruieren! An dieser Stelle möchte ich ausdrücklich betonen: Zur schulgemäßen Einführung der Exponentialfunktion mit Basis e halte ich weder die Differentialgleichung, noch den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n$ (womöglich im Zusammenhang mit der sogenannten stetigen Verzinsung), noch gar die Reihenentwicklung für den geeigneten Ausgangspunkt.

Geschult durch die Gleichungslehre, möchte man nun die Menge aller Lösungen überblicken: Ist g irgendein Element dieser Menge, so hat die Funktion $x \mapsto \frac{g(x)}{e^{kx}}$ die Ableitung identisch Null, ist also konstant, etwa gleich a. (Hier sind die Quotientenregel und etwas tiefergehende Analysiskenntnisse erforderlich.) Folglich gilt $g(x) = a \cdot e^{kx}$ mit $a \in \mathbb{R}$. D.h. die Lösungen der Differentialgleichung sind, wenn man sich auf Funktionen mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ beschränkt, genau die (exponentiellen) Wachstumsfunktionen.

Durch G. Pickert wurde angeregt, daß man - schon um der Analogie zu den linearen Gleichungssystemen willen - auch auf die inhomogene Differentialgleichung $f' - kf = c$ $(k \neq 0)$ eingehen sollte. Hat man eine spezielle Lösung dieser Gleichung geraten, hier sofort die konstante Funktion $f_o = -\frac{c}{k}$, so erhält man bekanntlich alle Lösungen f durch Addition einer beliebigen Lösung der homogenen Gleichung; also $f(x) = a \cdot e^{kx} - \frac{c}{k}$.

Damit sind den Schülern zahlreiche wesentliche Anwendungen zugänglich geworden. Der Kürze halber beschränke ich mich auf das eine Beispiel der Temperaturanpassung, wo man auch ohne viel Physikkenntnisse den Ansatz der Differentialgleichung als plausible Annahme über die Änderungsgeschwindigkeit der Temperatur akzeptieren wird, um ein Modell für den tatsächlichen Verlauf durchrechnen zu können:

$T' = K\cdot(T_R-T)$;

$T'+KT = KT_R$, also

$T(t) = a\cdot e^{-Kt}+T_R$.

$T(o) = a+T_R$, also

$a = T(o)-T_R = T_A-T_R$.

Somit ist $T(t) = T_R-(T_R-T_A)e^{-Kt}$.

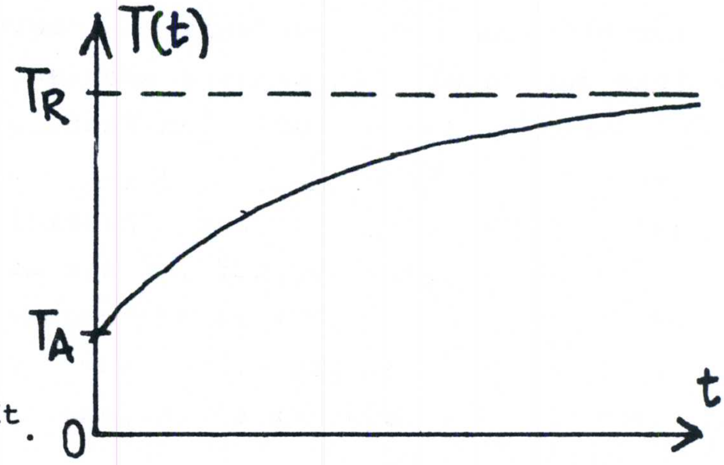


Fig. 11

Welche Gegenstände sind nun geeignet für eine mögliche Vertiefung in der obersten Gymnasialklasse: begriffliche Präzisierung oder aber weitere, anspruchsvollere Anwendungen? Die übliche Präzisierung der Definition der Exponentialfunktionen ist bekannt: Man definiert den e-Logarithmus als Integral über $\frac{1}{x}$ und die Exponentialfunktion zur Basis e als seine Umkehrfunktion. Wenn möglicherweise bei den Schülern kein Bedürfnis für eine solche Präzisierung besteht, so signalisiert dies eine schon erwähnte Gefahr des Spiralprinzips, die mir hier aber nicht so gravierend zu sein scheint. Eher schon würde ich den Schülern Beweise unserer beiden ausdrücklich genannten Annahmen über das Verhalten von $x \mapsto b^x$ an der Stelle 0, auf der Grundlage der Vorkenntnisse (1) bis (3), zumuten.

Wiederholt haben W. Blum und ich für schuladäquate Strengeniveaus im Analysisunterricht plädiert, die unterhalb des Niveaus der akademischen Anfängervorlesungen liegen und trotzdem keineswegs bloße Rezeptvermittlung bedeuten. Auch bei dem hier vorgeschlagenen Weg wird "anständiges Argumentieren" ermöglicht und gefordert. S. Seyfferth hat kürzlich (auf der Klagenfurter Tagung 1976) für Vertiefungen im Oberstufenunterricht explizit die Behandlung anspruchsvollerer Anwendungen statt weiterer begrifflicher Präzisierung vorgeschlagen.

Zur Herstellung der Anwendungsbezüge sei allgemein betont, daß hier fächerübergreifende Gesichtspunkte ins Spiel kommen. Speziell die Verifikation der Funktionalgleichung (Grundregel) bzw. der Differentialgleichung der (exponentiellen) Wachstumsfunktionen erfordert eine mehr oder weniger anspruchsvolle inhaltliche Analyse des jeweiligen Sachzusammenhangs - oder gar theoretische Hilfsmittel der betreffenden Fachdisziplinen. Hierbei lassen sich verschiedene Typen von Situationen unterscheiden, insbesondere:

(a) Die Gleichung ist eine - plausible oder auch empirisch gestützte - Annahme, um auf ihr als Grundlage ein Modell für den betreffenden realen Prozeß durchzurechnen.

(b) Die Gleichung ist eine - aus der Analyse der jeweiligen Situation bzw. aus der betreffenden Gegenstandstheorie heraus - begründbare Aussage.

Leider können wir dies hier nicht weiter verfolgen. Ausdrücklich erinnere ich nochmals an den verbreiteten Proportionalitäts-Irrglauben. Entsprechend könnte mangelnde Sorgfalt bei der Herstellung von Realitätsbezügen zu dem Irrglauben führen, Wachstumsprozesse verliefen (von realen Beschränkungen abgesehen) notwendig exponentiell. Um dem zu wehren, sollte man von vornherein auch geeignete Kontrastbeispiele behandeln, jetzt also insbesondere reale Beispiele für überexponentielles Wachstum, wie etwa das explosive Wachstum einer Population.

Abschließend einige allgemein-didaktische Bemerkungen zum Anwendungsbezug, den wir eingangs als eine Zielvorstellung und Rechtfertigung für den Mathematikunterricht hervorgehoben haben. Nach einer Phase der Struktur-Orientierung wird in der gegenwärtigen Diskussion die Anwendbarkeit der Mathematik stärker betont, ja mitunter modisch überbetont. Folgende extreme Positionen werden dabei vertreten:

- Anwendungen gelten nur als methodisches Mittel (Motivationshilfe, Veranschaulichung) für die Behandlung mathematischer Gegenstände (Beispiel: G. Papy's "Einkaufsvektoren" zur Veranschaulichung des Begriffs "Vektorraum");
- Anwendungen (und zwar nur reale und für Schüler erkennbar "relevante") gelten als einzig legitimer Zweck des Mathematikunterrichts überhaupt (I. Neander, D. Volk u.a.).

Beide Positionen können zur Begründung für eine Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts Beiträge leisten; als einseitige, ausschließliche Rechtfertigungen für den Anwendungsbezug sind jedoch beide zu verwerfen. Jedenfalls ist die Frage "wozu nützt das?" legitim. Aber auch das Weiterverfolgen eines Problems aus theoretischem Interesse ist legitim - und nicht nur, weil dies mitunter sogar zu unerwarteten Anwendungen führt. An dieser Stelle sei nochmals H. Freudenthal, mit einer vielleicht etwas pathetischen Äußerung, zitiert: "... auch die anderen, die die Mathematik niemals anwenden werden, sollen Mathematik lernen, weil sie sie nötig haben, um ganz Mensch zu sein."

Was schließlich den konkreten Gegenstand dieses Vortrags betrifft, so dürfte deutlich geworden sein:
Wachstumsprozesse sind ein vorzügliches Mittel zur Motivation, zur Veranschaulichung, ja zum Gewinn eines tieferen Verständnisses der Exponentialfunktionen - aber sie sind nicht nur ein Mittel, sondern auch inhaltlich bedeutsam.
Exponentialfunktionen sind ein unentbehrliches Werkzeug zur Beschreibung, zum besseren Verständnis, zur kritischen Beurteilung von Wachstumsprozessen - aber sie sind nicht nur ein Werkzeug, sondern auch für sich selbst genommen interessant und wichtig.